

## Devoir surveillé n° 2 : Correction

### Exercice 1. (d'après CCINP TSI 2024)

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ . Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente.

Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

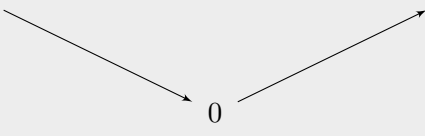
**Q1.** Énoncer la définition de la convergence pour une série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  de nombres réels ou complexes.

C'est du cours. On dit que la série est convergente si la suite des sommes partielles est convergente.

Autrement dit la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est dite convergente si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$  existe et est finie.

**Q2.** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

*Méthode 1 :* On étudie la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - 1 - x$ . Elle est dérivable comme somme de fonctions usuelles et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^x - 1$ . On a  $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ . Ainsi

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f$			

En particulier,  $f$  est positive, autrement dit pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

*Méthode 2 :* La fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$  (car sa dérivée seconde est positive). Sa courbe représentative se trouve donc au-dessus de sa tangente au point  $x = 0$ . Or celle-ci a pour équation  $y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$ . Cela signifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

**Q3.** En déduire que

$$\forall n \geq 1, e^{H_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $e^{H_n} \geq n + 1$ .

• Soit  $n \geq 1$ .  $e^{H_n} = \exp\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=0}^n e^{1/k}$ . Or d'après **Q2**, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $e^{1/k} \geq 1 + \frac{1}{k}$  donc en multipliant ces inégalités (possible car tout est positif) pour  $0 \leq k \leq n$ , on obtient

$$e^{H_n} = \prod_{k=0}^n e^{1/k} \geq \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

• Comme  $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ , le membre de droite de l'inégalité précédente vaut  $\prod_{k=0}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$  par télescopage (on sinon on remarque que le produit des numérateurs vaut  $(n+1)!$  et celui des dénominateurs  $n!$  et on simplifie). Ainsi, pour tout  $n \geq 1, e^{H_n} \geq n + 1$ .

**Q4.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$ .

En déduire la divergence de la série harmonique.

- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ , d'après l'inégalité de la question précédente, on obtient par comparaison

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty.$$

- En composant par  $\ln$  qui est continue, il vient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ . Comme la suite des sommes partielles  $(H_n)$  n'admet pas une limite finie, d'après la définition rappelée en [Q1](#), la série harmonique est divergente.