Devoir surveillé n° 2 : Correction

Exercice 1. (*d'après CCINP TSI 2024*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$. Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q1. Énoncer la définition de la convergence pour une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

C'est du cours. On dit que la série est convergente si $\boxed{\text{la suite des sommes partielles est convergente}}$. Autrement dit la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est dite convergente si $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est finie.

Q2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Méthode 1 : On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x$. Elle est dérivable comme somme de fonctions usuelles et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On a $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$. Ainsi

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En particulier, f est positive, autrement dit $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$.

Méthode 2 : La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée seconde est positive). Sa courbe représentative se trouve donc au-dessus de sa tangente au point $x = 0$. Or celle-ci a pour équation $y = \mathrm{e}^0(x - 0) + \mathrm{e}^0 = x + 1$. Cela signifie que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x + 1}$.

Q3. En déduire que

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $e^{H_n} \geqslant n + 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. $\mathrm{e}^{H_n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{1/k}$. Or d'après **Q2**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{e}^{1/k} \geqslant 1 + \frac{1}{k}$ donc en multipliant ces inégalités (possible car tout est positif) pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$\mathrm{e}^{H_n} = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{1/k} \geqslant \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

- Comme $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, le membre de droite de l'inégalité précédente vaut $\prod_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$ par télescopage (on sinon on remarque que le produit des numérateurs vaut $(n+1)!$ et celui des dénominateurs $n!$ et on simplifie). Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ e^{H_n} \geqslant n + 1}$.

Q4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{H_n} = +\infty$.
En déduire la divergence de la série harmonique.

- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, d'après l'inégalité de la question précédente, on obtient par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{H_n} = +\infty}$.
- En composant par ln qui est continue, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Comme la suite des sommes partielles (H_n) n'admet pas une limite finie, d'après la définition rappelée en **Q1**, $\boxed{\text{la série harmonique est divergente}}$.